Kwantowe przestrzenie Minkowskiego

P. Podleś
Katedra Metod Matematycznych Fizyki, Wydział Fizyki,
Uniwersytet Warszawski, ul. Hoża 74, 00–682 Warszawa

Kwantowa teoria pola (KTP) opisuje z zadziwiającą precyzją oddziaływania elektrosłabe, a także (z dokładnością do słynnego problemu uwięzienia kwarków) silne. Z kolei oddziaływanie grawitacyjne okazuje się być przejawem geometrii naszej czasoprzestrzeni, opisywanej przez ogólną teorię względności (OTW). Niestety, mimo długotrwałych wysiłków wielu fizyków nie udało się znaleźć zadowalającej teorii, której szczególnymi przypadkami byłyby zarówno KTP jak i OTW. Jedną z przyczyn tego stanu rzeczy jest fakt, że tzw. długość Plancka l_P otrzymana ze stałej Plancka $\hbar$ w KTP oraz stałej grawitacyjnej G i prędkości światła c w OTW jest niesłychanie mała i efekty tej skali są obecnie eksperymentalnie nieweryfikowalne, być może za wyjątkiem pierwszego stadium ewolucji wszechświata bądź czarnych dziur.

Pewnej wskazówki nt. charakteru owej przyszłej teorii dostarcza następujące heurystyczne rozumowanie [1]: Załóżmy, że usiłujemy bardzo precyzyjnie zlokalizować pewne zdarzenie w czasoprzestrzeni. Wówczas bardzo małe nieoznaczoności współrzędnych tego zdarzenia prowadzą, zgodnie z zasadą nieoznaczoności Heisenberga, do bardzo dużych nieoznaczoności odpowiednich współrzędnych pędu, a więc i energii. Wobec dodatniości energii otrzymujemy bardzo dużą jej wartość oczekiwaną w bardzo małej objętości, co prowadzi do powstania czarnej dziury. A więc próba dokładnego zbadania geometrii czasoprzestrzeni zmienia tę geometrię, jest ona więc w klasycznym sensie niepoznawalna. Mamy więc do czynienia ze zmianą geometrii na bardzo małych odległościach.

Jedną z możliwych dróg do zmiany geometrii czasoprzestrzeni można otrzymać przez odwołanie się do reguł komutacyjnych Heisenberga w mechanice kwantowej. Zgodnie z nimi np. pierwsza współrzędna cząstki x oraz odpowiednia współrzędna pędu p_x nie są zwykłymi liczbami lecz abstrakcyjnymi obiektami (operatorami) takimi, że

$$xp_x - p_x x = i\hbar$$

W szczególnoći $xp_x \neq p_x x$. Teraz jest już tylko jeden krok do założenia, że same współrzędne x, y, z spełniają $xy \neq yx$ itp., a więc są nieprzemiennymi obiektami tworzącymi pewną algebrę $\mathcal{C}$. Gdyby $xy = yx$ itp. to t, x, y, z możnaby utożsamić ze współrzędnymi na klasycznej czasoprzestrzeni. Obecnie natomiast t, x, y, z wyobrażamy sobie jako "współrzędne na (czaso-) przestrzeni kwantowej". Oczywiście takich przestrzeni kwantowych jest bardzo wiele – tyle ile nieprzemiennych algebr. Interesującymi modelami będą tu przestrzenie kwantowe mające własności zbliżone (w pewnym sensie) do klasycznych, co stwarzałoby możliwość przyjrzenia się na tych konkretnych przykładach mechanizmom mogącym wystąpić w szukanej teorii.

Niewątpliwie najprostszą czasoprzestrzenią jest czasoprzestrzeń szczególnej teorii względności tzn. przestrzeń Minkowskiego M z czterema współrzędnymi t, x, y, z, które odpowiednio transformują się przy zmianach układu odniesienia zgodnie z działaniem grupy Poinceré P na M (tak naprawdę zamiast P bierzemy podwójne nakrycie jej spójnej składowej, które jest w KTP ważniejsze niż sama grupa Poincaré). Naszym zadaniem jest więc znalezienie przestrzeni kwantowych o własnościach analogicznych do M wyposażonego w działanie P na M. Nazywamy je kwantowymi przestrzeniami Minkowskiego (k.p.M.). Są one zdefiniowane w następujący sposób: działanie P na M oraz mnożenie grupowe w P definiują pewne algebraiczne struktury (kodziałanie Γ oraz komnożenie Δ) na poziomie funkcji (w szczególności współrzędnych) na P oraz M. Struktury te opisują własności teorii reprezentacji grupy P oraz własności transformacyjne funkcji na M. Naszymi głównymi postulatami wynikającymi z zasady korespondencji są:

1. te własności mają pozostać bez zmian

2. funkcje na P (oraz M) są zastąpione nieprzemiennymi obiektami, ale tak by "rozmiar" odpowiednich algebr nie uległ zmianie.

Niemal kompletna klasyfikacja kwantowych grup Poincaré została podana w [2]. Każdej z nich odpowiada dokładnie jedna k.p.M. "Współrzędnymi" na niej są operatory $x_0 = t$, $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$ spełniające układ relacji

$$(R_{ij,kl} - \delta_{ik}\delta_{jl})(x_k x_l - Z_{kl,m} x_m + T_{kl}) = 0$$

$i, j = 0, 1, 2, 3$ (sumowanie po powtarzających się wskaźnikach, liczbowe współczynniki macierzy R, Z, T można wyliczyć dla poszczególnych przypadków na podstawie [2]). Warto zauważyć, że macierze R są rozwiązaniami słynnego równania Yanga-Baxtera przy czym ich kwadraty są macierzami jednostkowymi. W naturalny sposób określa się liczbowe współczynniki tensora metrycznego g_{ij}. Następnym etapem jest wyróżnienie k.p.M. spełniających tzw. warunek kwazitriangularności. Dla nich macierz R pozwala przestawiać cząstki i definiować przestrzeń Focka. Ponadto istnieje wówczas jedyny rachunek różniczkowy na k.p.M., o własnościach analogicznych do klasycznego. Spełnia on "skwantowaną" regułę Leibniza np.

$$\partial_i(x_k f) = \delta_{ik} f + (R_{kl,in} x_n + Z_{kl,i}) \partial_l(f)$$

(patrz [3]). W naturalny sposób wprowadzamy niezmienniczy dalambercjan, równania Kleina–Gordona (cząstki o spinie 0) oraz Diraca (spin 1/2).

Klasyczna grupa Poincaré P składa się z grupy Lorentza (nie zmieniającej początku układu odniesienia, otrzymanej przez składanie obrotów oraz pchnięć Lorentzowskich, polegających na przejściu od pewnego układu odniesienia do układu poruszającego się względem niego z pewną stałą prędkością) oraz translacji polegających wyłącznie na zmianie początku układu odniesienia. Otóż jednej kwantowej grupie Lorentza (określającej macierz R) odpowiada na ogół wiele kwantowych grup Poincaré (można dodawać translacje na różne sposoby). W szczególności dla klasycznej grupy Lorentza (i macierzy R danej przez $R_{ij,kl} = \delta_{il}\delta_{jk}$) istnieje wiele kwantowych grup Poincaré i k.p.M. Ciekawą własnością tych k.p.M. jest to, że fale płaskie $e^{ix_a p_a}$ (gdzie p_a są liczbami zaś x_a nieprzemiennymi "współrzędnymi") podobnie jak w przypadku klasycznym rozwiązują równanie Kleina-Gordona i mają określony pęd P_a ale w ogólności P_a nie są równe p_a lecz są skomplikowanymi funkcjami p_b, $b = 0, 1, 2, 3$. Podobnie związek masy m z p_b jest bardziej skomplikowany niż w zwykłej teorii [3],[4]. W szczególności ulega zmianie postać propagatora jednocząstkowego (może nastąpić jego częściowa regularyzacja bądź efekt podobny jak dla jednowymiarowej dyskretnej siatki).

Reasumując, k.p.M. i obiekty z nimi związane pozwalają:

1. zobaczyć standardową teorię na tle innych (np. w standardowej teorii macierz Diraca γ^0 występuje w 2 rolach - w równaniu Diraca oraz przy sprzęganiu bispinorów; obecnie te 2 role bez większej szkody zostają rozdzielone i są spełniane przez na ogół różne macierze)

2. przeprowadzać dowody w naturalny sposób, oparty na teorii reprezentacji grup (mechaniczne podstawianie macierzy do wzorów jest praktycznie niemożliwe z uwagi na wielość różnych przypadków)

3. uzyskać pewne regularyzacje

[1] Nahm, W., rozumowanie przedstawione w czasie wykładu w 1991 r.

[2] Podleś, P., Woronowicz, S.L., On the classification of quantum Poincaré groups, *Commun. Math. Phys.* **178** (1996), 61–82.

[3] Podleś, P., Solutions of Klein–Gordon and Dirac equations on quantum Minkowski spaces, *Commun. Math. Phys.* **181** (1996), 569–585.

[4] Podleś, P., The Dirac operator and gamma matrices for quantum Minkowski spaces, *J. Math. Phys.* **38** (1997), 4474–4491.