Transformacja Darboux-Bäcklunda i algebry Clifforda

Jan L. Cieśliński

Uniwersytet w Białymstoku, Instytut Fizyki Teoretycznej

Zaczniemy od krótkiego wprowadzenia w teorię solitonów [?, ?], czyli całkowalnych równań nieliniowych, na przykładzie najbardziej chyba znanego równania solitonowego jakim jest równanie Kortewega-de Vriesa (KdV). Kluczową rolę odgrywa w tym przypadku... równanie Schrödingera:

$$-\psi,_{xx} + u\psi = \lambda\psi \ , \tag{1}$$

gdzie x jest zmienną przestrzenną (dla wygody przeskalowaną, czyli nasze x jest w istocie równe $x\hbar^{-1}\sqrt{2m}$), $u = u(x)$ jest potencjałem, $\lambda = E$ jest energią, a przecinek oznacza pochodną (czyli $\psi,_x := \partial\psi/\partial x$). Z mechaniki kwantowej wiadomo, że znając dane rozproszeniowe (współczynniki przejścia i odbicia oraz stany związane) dla każdej wartości λ możemy zrekonstruować potencjał u korzystając z równań całkowych Gelfanda-Levitana-Marczenki. Sytuacja taka często występuje w fizyce wysokich energii: aby zbadać dany obiekt (potencjał u) rozpraszamy na nim **inny** obiekt (funkcja falowa ψ, spełniająca równanie liniowe). Uogólnienie tej idei dało w roku 1967 początek burzliwemu rozwojowi teorii solitonów. Mianowicie wykazano [?], że jeśli jednoparametrowa rodzina potencjałów $u = u(x;\tau)$, spełnia równanie KdV ($u,_\tau + 6uu,_x + u,_{xxx} = 0$), to energia λ nie zależy od τ ($\lambda,_\tau = 0$). Co więcej, dane rozproszeniowe ewoluują w bardzo prosty sposób, dzięki czemu zagadnienie początkowe dla równania KdV sprowadza się do rozwiązywania wspomnianych wyżej równań całkowych.

Przejdziemy teraz do metody otrzymywania ścisłych rozwiązań równania KdV. Szukamy transformacji $\psi \mapsto \tilde{\psi}$, $u \mapsto \tilde{u}$ zachowującej równanie (??) (czyli żądamy $-\tilde{\psi},_{xx} + \tilde{u}\tilde{\psi} = \lambda\tilde{\psi}$). W ubiegłym stuleciu (równanie (??)

znane było już w matematyce jako problem Sturma-Liouville'a) Darboux zauważył, że można zapostulować $\tilde{\psi} = \psi,_x - \sigma\psi$, przy czym $\sigma = \sigma(x)$ jest pewną funkcją. Można obliczyć, że $\sigma = \varphi^{-1}\varphi,_x$, gdzie φ spełnia równanie $-\varphi,_{xx} + u\varphi = \lambda_1\varphi$ (ten sam potencjał, lecz inna energia). Ponadto $\tilde{u} = u - 2\sigma,_x$. Zaczynając od $u = 0$ otrzymujemy w ten sposób $\tilde{u}$ będące solitonem, czyli zlokalizowanym rozwiązaniem, poruszającym się ze stałą prędkością bez zmiany kształtu. W podobny sposób można "dodać" soliton na zadane tło oraz otrzymać rozwiązania będące superpozycją (nieliniową!) dowolnej liczby solitonów.

Zarówno równanie Schrödingera (**??**), jak i transformację Darboux można przedstawić w postaci macierzowej: $\Psi,_x = U\Psi$, $\tilde{\Psi} = D\Psi$, przy czym jeśli ψ, ϕ oznaczają dwa liniowo niezależne rozwiązania (**??**), to

$$\Psi := \begin{pmatrix} \psi,_x & \phi,_x \\ \psi & \phi \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 0 & u - \lambda \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -\sigma & u - \lambda - \sigma,_x \\ 1 & -\sigma \end{pmatrix}.$$

Równania solitonowe można zazwyczaj przedstawić właśnie jako warunki całkowalności ($U,_t - V,_x = [V, U]$) dla **problemów spektralnych**, czyli równań macierzowych typu $\Psi,_x = U\Psi$, $\Psi,_t = V\Psi$, gdzie macierze U, V są wymierne w λ (poniżej ograniczymy się nawet do macierzy liniowych w λ).

Podejście powierzchni solitonowych [**?**] wiąże teorię solitonów z klasyczną geometrią różniczkową rozumianą w duchu Bianchi'ego, Darboux i innych wielkich geometrów XIX wieku [**?**]. Mianowicie, mając macierzową funkcję falową Ψ definiujemy F za pomocą wzoru Syma-Tafla [**?**, **?**]

$$F = \Psi^{-1}\Psi,_\lambda \quad . \tag{2}$$

$F = F(x, t; \lambda)$ jest macierzą, a więc elementem pewnej przestrzeni wektorowej. Na przykład, jeśli Ψ przybiera wartości w $\mathbf{SU}(2)$, to $F \in \mathbf{su}(2)$, a $\mathbf{su}(2)$ można utożsamić z $\mathbf{R}^3$. F opisuje więc (dla ustalonego λ) powierzchnię w $\mathbf{R}^3$. Ten przypadek wiąże się z wieloma ciekawymi problemami zarówno w fizyce, jak i w geometrii. Wymieńmy tylko równanie ruchu nici wirowej w cieczy idealnej [**?**] oraz równanie sinusa-Gordona $\varphi,_{xt} = \sin\varphi$, dla którego powierzchnie solitonowe (**??**) są powierzchniami pseudosferycznymi w $\mathbf{R}^3$ (mają stałą ujemną krzywiznę Gaussa). Transformacja generująca rozwiązania solitonowe dla równania sinusa-Gordona podana została przez Bianchi'ego i Bäcklunda ponad 100 lat temu. Obecnie transformacje tego typu nazywane są, niezależnie od równania, transformacjami Darboux-Bäcklunda.

Zadając różne postacie problemów spektralnych można spodziewać się otrzymania coraz to innych układów równań solitonowych. Problemy spektralne związane z macierzami 2-ego i 3-ego stopnia są już w zasadzie dawno przebadane i trudno znaleźć w ten sposób cokolwiek nowego. W przypadku macierzy większego wymiaru otrzymywane układy, choć całkowalne, nie są zazwyczaj zbyt interesujące. Nowe perspektywy otwiera zastosowanie algebr Clifforda [**?**]. Po pierwsze, otrzymujemy wygodną metodę traktowania szerokiej klasy problemów z macierzami dużych wymiarów (algebry Clifforda można reprezentować macierzami) i dowolną liczbą zmiennych niezależnych. Po drugie, problemy spektralne w algebrach Clifforda często mają ciekawą interpretację geometryczną: interesujący jest nie tyle otrzymywany układ równań nieliniowych, ale raczej obiekt geometryczny opisywany tymi równaniami. Na przykład rozważmy problemy spektralne typu:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x^k} = \mathbf{e}_k(\lambda \mathbf{a}_k + \mathbf{b}_k)\Psi \ , \qquad (k = 1, \ldots, n) \ , \tag{3}$$

gdzie $\mathbf{b}_k$ są funkcjami o wartościach w przestrzeni V rozpiętej przez $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_r$, zaś $\mathbf{a}_k$ przybierają wartości w przestrzeni W rozpiętej przez $\mathbf{e}_{r+1}, \ldots, \mathbf{e}_{r+q}$, przy czym $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{r+q}$ generują algebrę Clifforda (czyli spełaniają relacje $\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j + \mathbf{e}_j\mathbf{e}_i = 0$ (dla $i \neq j$) oraz $\mathbf{e}_j^2 = \pm 1$). Przykładami obiektów spełniających takie relacje są macierze Pauliego i macierze Diraca.

Wzór (**??**) dla $\lambda = 0$ definiuje w tym przypadku obiekt zanurzony w przestrzeni $V \wedge W$. Wektory styczne, $\partial F/\partial x^k = \Psi^{-1}\mathbf{e}_k\mathbf{a}_k\Psi$, są parami ortogonalne. Na ogół otrzymujemy kilka interesujących obiektów geometrycznych (rzutując F na odpowiednie podprzestrzenie). W przypadku $n = q = 2$ otrzymujemy parę tzw. powierzchni izotermicznych zanurzonych w $\mathbf{R}^r$ [**?**]. W przypadku $r = q = n$ otrzymujemy n różnych sieci ortogonalnych w $\mathbf{R}^n$, a pojawiające się wówczas równania nieliniowe to układ równań Lamé'go.

Dla problemów spektralnych (**??**) można skonstruować transformację Darboux-Bäcklunda. Zadawana jest ona przez

$$D = \mathbf{e}_s(\lambda \mathbf{n} + \kappa \mathbf{p}) \tag{4}$$

gdzie s jest ustalone ($1 \leq s \leq r$), λ i κ to parametry rzeczywiste, zaś $\mathbf{n} \in W$ oraz $\mathbf{p} \in V$ ($\mathbf{p}^2 = \mathbf{n}^2 = \pm 1$) zależą od $x^1, \ldots, x^n$ i wyrażają się algebraicznie przy pomocy $\Psi(i\kappa)$. Na poziomie wektora wodzącego F transformacja Darboux-Bäcklunda ma postać

$$\tilde{F} = F + \kappa^{-1}\Psi(0)^{-1}\mathbf{p}^{-1}\mathbf{n}\Psi(0) \ ,$$

czyli do wektora F dodajemy segment (wektor) o stałej długości.

Przedstawione tu rezultaty okazują się mieć zastosowanie nie tylko w geometrii, ale i w fizyce (publikacja na ten temat jest dopiero w przygotowaniu). W przypadku $r = n = 4$ i $\mathbf{e}_1^2 = \mathbf{e}_2^2 = \mathbf{e}_3^2 = -\mathbf{e}_4^2 = 1$ możemy każde z równań (**??**) pomnożyć z lewej strony przez $\mathbf{e}_k^{-1}$, dodać stronami wszystkie te równania i oznaczając $\mathbf{e}_k^{-1} =: i\gamma^k$ $(k = 1, 2, 3)$, $\mathbf{e}_4^{-1} =: i\gamma^0$, otrzymamy

$$\sum_{\mu=0}^{3} \gamma^\mu (i\partial_\mu - A_\mu)\Psi = \lambda C\Psi \ ,$$

gdzie A_μ są współczynnikami w rozkładzie $\sum_{\nu=1}^4 \mathbf{b}_\nu$ na γ_μ, zaś $C := \sum_{\nu=1}^4 \mathbf{a}_\nu$. Dla $\lambda = 0$ jest to równanie Diraca dla cząstki bezmasowej w polu elektromagnetycznym. Otrzymujemy w ten sposób jedynie pewną klasę rozwiązań równania Diraca (Ψ spełniać musi także pozostałe równania (**??**)). Niemniej ten dość nieoczekiwany związek równania Diraca z równaniami Lamé'go, a zwłaszcza istnienie transformacji Darboux-Bäcklunda, może doprowadzić do uzyskania nowych ścisłych rozwiązań równania Diraca.

Tematyka badań przedstawiona w tym krótkim artykule jest finansowana przez Komitet Badań Naukowych (grant Nr 2 P03B 143 15).

Literatura

[1] V.E.Zakharov, S.V.Manakov, S.P.Novikov, L.P.Pitaievsky: *Teoria solitonów*, Nauka, Moskwa 1980 [po rosyjsku].

[2] A.Sym: "Solitony", *Postępy Fizyki* **31** (1980) 3-18.

[3] C.S.Gardner, J.M.Greene, M.D.Kruskal, R.M.Miura: "Method for solving the Korteweg-de Vries equation", *Phys.Rev.Lett.* **19** (1967) 1095-1097.

[4] A.Sym: "Soliton Surfaces", *Lett. Nuovo Cim.* **33** (1982) 394-400.

[5] S.S.Chern: "Surface Theory with Darboux and Bianchi", w książce *Miscellanea Mathematica*, str. 59-69, Springer-Verlag, Berlin-New York 1991.

[6] J.Cieśliński: "The Darboux-Bianchi-Bäcklund transformations and soliton surfaces", w książce *Nonlinearity & Geometry* (red. D. Wójcik i J. Cieśliński), str. 81-107, PWN, Warszawa 1998.

[7] J.Cieśliński, P.K.H.Gragert, A.Sym: "Exact Solution to Localized-Induction-Approximation Equation Modelling Smoke Ring Motion", *Phys.Rev.Lett.* **57** (1986) 1507-1510.

[8] J.Komorowski: *Od liczb zespolonych do tensorów, spinorów, algebr Liego i kwadryk*, PWN, Warszawa 1978.