Teoria separowalności układów bihamiltonowskich

Maciej Błaszak
Instytut Fizyki, Uniwersytet im.A.Mickiewicza, Poznań

December 29, 1999

Metoda separowalności zmiennych należy do podstawowych metod fizyki matematycznej poczynając od XIX wieku. Zapoczątkowana pracami D'Alamberta, Fouriera i Jacobiego, przez wiele dekad była jedyną znaną metodą całkowania układów dynamicznych. Przypomnijmy krótko metodę separacji zmiennych w mechanice klasycznej. Rozważmy hamiltonowski układ mechaniczny o $2n$ stopniach swobody, całkowalny w sensie Liouville'a. Oznacza to, że istnieje n liniowo niezależnych funkcji h_i (hamiltonianów), które są w inwolucji względem kanonicznego nawiasu Poissona: $\{h_j, h_k\} = 0$. Zbiór zmiennych kanonicznych $(\lambda_i, \mu_i)_{i=1}^n$ nazywamy zmiennymi separowalności jeśli isnieje n funkcji postaci $\varphi_i(\lambda_i, \mu_i, h_1, ..., h_n) = 0$, $i = 1, ..., n$, z których każda łączy parę sprzęgniętych zmiennych i wszystkie hamiltoniany. Ustalając wartości hamiltonianów $h_j = const = a_j$ otrzymujemy jawną faktoryzację torusa Liouville'a. Oznacz to, że w równaniu Hamiltona-Jacobiego w zmiennych (λ_i, μ_i) funkcja generująca $W(\lambda, a) = \sum_{i=1}^n W_i(\lambda_i, a)$ i w konsekwencji równania ruch potrafimy znaleźć przez kwadratury.

W XIX wieku i większości XX, dla wielu modeli mechaniki zmienne separowalności były albo odgadywane albo znajdowane metodami *ad hoc.* Fundamentalny postęp w teorii separowalności nastąpił w 1985 roku, kiedy to E.Sklyanin zaadoptował teorię reprezentacji Laxa do systematycznego znajdowania zmiennych separacji (patrz artykuł przeglądowy [1] i cytowana tam literatura). W ostatnich dwóch latach została sformułowana alternatywna teoria separowalności układów skończenie wymiarowych oparta na bihamiltonowskości układów całkowalnych w sensie Liouville'a. Wyjaśnijmy krótko czym jest bihamiltonowskość. Niech $M \ni u$ oznacza rozmaitość różniczkową (przestrzeń fazową), T_uM i T_u^*M przestrzeń styczną i kostyczną w u oraz $<.,.>: T_u^*M \times T_uM \to R$. Dalej, niech dF oznacza różniczkę gładkiej funkcji $F \in C^\infty(M)$. M nazywamy rozmaitością Poissona jeśli jest wyposażona w nawias Poissona $\{.,.\}_\pi : C^\infty(M) \times C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ w ogólności zdegenerowany. Odpowiednia macierz Poissona π jest zdefiniowana przez $\{F, G\}_\pi(u) :=< dF(u), \pi(u)dG(u) >$, czyli w dowolnym punkcie u, $\pi(u) : T_u^*M \to T_uM$ jest liniowym antysymetrycznym odwzorowaniem spełniającym tożsamość Jacobiego. Dowolna funkcja $c \in C^\infty(M)$, taka, że $dc \in \pi$, nazywana jest Casimirem macierzy π. Niech π_0, π_1 będą dwoma macierzami Poissona na M. Pole wektorowe K nazywamy polem bihamiltonowskim ze względu na π_0 i π_1 jeśli istnieją dwie funkcje $H, F \in C^\infty(M)$ takie, że

$$K = \pi_0 \cdot dH = \pi_1 \cdot dF. \tag{1}$$

Poissonowskie macierze π_0 i π_1 nazywamy zgodnymi jeśli $\pi_\lambda := \pi_1 - \lambda\pi_0$ jest również macierzą Poissona dla dowolnego $\lambda \in R$. Wtedy π_λ nazywamy Poissonowskim ołówkiem. Dla większości znanych bihamiltonowskich układów skończenie wymiarowych obie struktury Poissonowskie są zdegenerowane. Można więc zawsze skonstruować bihamiltonowski łańcuch pól wektorowych, który zaczyna się od Casimira π_0 i kończy na Casimirze π_1. Istnienie ołówka Poissona gwarantuje komutację pól wektorowych łańcucha i inwolucję wszystkich Hamiltonianów względem π_0 i π_1. Wiele przykładów oraz metody konstrukcji łańcuchów czytelnik znajdzie w książce [2].

Jak istnienie bihamiltonowskich łańcuchów wiąże się z separowalnością wyjaśnimy na przykładzie najprostszej klasy łańcuchów z jednym Casimirem. Jak się okazuje, istnienie łańcuchów bihamiltonowskich jest charakterystyczną cechą układów separowalnych. Rozpatrzmy rozmaitość Poissona M ($\dim M = 2n+1$) wyposażoną w ołówek Poissonowski $\pi_\lambda = \pi_1 - \lambda\pi_0$ maksymalnego rzędu. Wtedy związany z nim łańcuch [3] jest postaci

$$\pi_0 dh_0 = 0,\ \pi_0 dh_1 = K_1 = \pi_1 dh_0, ..., \pi_0 dh_n = K_n = \pi_1 dh_{n-1},\ 0 = \pi_1 dh_n, \tag{2}$$

gdzie $K \equiv K_1, H \equiv h_1, F \equiv h_0$. Załużmy dla prostoty rozważań, że łańcuch (6) został znaleziony w reprezentacji dowolnych zmiennych kanonicznych (q,p) i zmiennej Casimirowskiej c. Wtedy oczywiście π_0 jest zdegenerowaną macierzą kanoniczną i $h_0 = c$.

W pracach [2,4] został znaleziony bihamiltonowski łańcuch (6) w zmiennych separowalności. W rozpatrywanym przez nas przypadkach zgodne struktury Poissona przybierają następującą postać:

$$\pi_0 = \begin{pmatrix} \theta_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \pi_1 = \begin{pmatrix} \theta_1 & K_1 \\ -K_1^T & 0 \end{pmatrix}, \theta_0 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}, \theta_1 = \begin{pmatrix} 0 & \Lambda \\ -\Lambda & 0 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

gdzie $\Lambda = diag(\lambda_1, ..., \lambda_n)$, I jest macierzą jednostkową a K_1 jest pierwszym polem wektorowym hierarchii. Przejdźmy teraz do redukcji Poissonowskiego ołówka π_λ na symplektyczny liść S macierzy π_0 ($\dim S = 2n$) ustalając wartość zmiennej Casimira. W rozważanym przypadku ołówek Poissona redukuje się w sposób trywialny, jako że oczywistym jest iż $\theta_\lambda = \theta_1 - \lambda\theta_0$ jest niezdegenerowanym ołówkiem Poissona na S. Ponadto, tak zwana macierz Nijenhuisa $N = \theta_1 \cdot \theta_0^{-1}$ jest diagonalna w zmiennych separacji.

Rozpatrzmy obecnie dowolną transformację kanoniczną $(\lambda, \mu) \to (q, p)$ niezależną od zmiennej c i w ogólności nie punktową. Zaletą pozostania w zbiorze zmiennych kanonicznych jest jasna struktura zdegenerowanego ołówka Poissona i trywialność jego redukcji na symplektyczny liść π_0. Tak więc mając łańcuch dany w naturalnych zmiennych kanonicznych, θ_0 jest niezdegenerowaną kanoniczną macierzą Poissona a θ_1 jest niezdegenerowaną niekanoniczną macierzą Poissona zależną od (q, p). Możemy więc skonstruować macierz Nijenhuisa $N(q, p)$. Transformacja do zmiennych separacji jest transformacją diagonalizującą N. W przypadku transformacji punktowych jest ona elementarna, dla transformacji niepunktowych procedura jest bardziej złożona, ale również znana.

Teorię separowalności dla łańcuchów z wieloma Casimirami czytelnik znajdzie w pracach [5,6].

References

[1] E.K.Sklyanin, *Separation of variables. New trends,* Prog.Theor.Phys. Suppl. **118** (1995) 35

[2] M.Błaszak, *Multi-Hamiltonian theory of dynamical systems,* Springer-Verlage 1998

[3] I.M.Gel'fand i I.Zakharevich, *On the local geometry of a bi-Hamiltonian structure,* In the Gel'fand Mathematical Seminars 1990-1992 (L.Corwin at al. eds.), Birkäuser, Boston, 1993 p. 51

[4] M.Błaszak, *On separability of bi-Hamiltonian chain with degenerated Poisson structure,* J.Math.Phys. **39** (1998) 3213

[5] M.Błaszak, *Theory of separability of multi-Hamiltonian chains,* J.Math.Phys. **40** (1999) 5725

[6] M.Błaszak, *Separability of two-Casimir bi- and tri-Hamiltonian chains,* Rep.Math.Phys. (in press)