Co starego w solitonach ?

Paweł Klimczewski i Antoni Sym

Uniwersytet Warszawski, Instytut Fizyki Teoretycznej,

ul. Hoża 69, 00-681 Warszawa, Poland

e-mail: `pablo@fuw.edu.pl, sym@fuw.edu.pl`

15 lutego 2000

Streszczenie

Współczesna teoria układów solitonowych jest głęboko zakorzeniona w klasycznej geometrii różniczkowej. Można wręcz mówić o "starej teorii solitonów" bez współczesnej terminologii solitonowej ale za to z imponującym bogactwem wyników czysto solitonowych. W eseju tym chcielibyśmy wskazać na najważniejszą linię rozwojową "starej teorii solitonów", która zaczyna się w programie badawczym G. Lamé a kończy się traktatem L.P. Eisenharta p.t. "Transformations of surfaces".

1 Wprowadzenie

Słynna książka Gabriela Lamé p.t. "Wykłady o współrzędnych krzywoliniowych i ich różnych zastosowaniach" (Paryż, 1859) kończy się takim oto proroctwem:

"Zatem nastanie nieuchronnie królestwo współrzędnych krzywoliniowych, które będą w stanie rozwiązać nowe problemy w całej ich ogólności. Tak, ta epoka definitywnie nadejdzie, lecz raczej późno: ci, którzy jako pierwsi wskazali te nowe narzędzia odejdą i zostaną całkowicie zapomniani; chyba że jakiś geometra - archeolog ożywi ich imiona. Zresztą i tak najważniejsze jest to, aby nauka szła naprzód".

Oczywiście nazwisko "Gabriel Lamé" nie uległo zapomnieniu, ale reszta proroctwa spełniła się i nadal się spełnia. Dzięki opracowanej przez Lamé metodzie rozdzielania zmiennych potrafimy efektywnie rozwiązywać liczne problemy fizyki teoretycznej opisywane liniowymi równaniami fizyki matematycznej. To właśnie z metody Lamé wyrasta bogata i stale rozwijająca się teoria funkcji specjalnych w różnych (np. grupowym) ujęciach. Jednym z najważniejszych spełnień proroctwa Lamé jest fundamentalna praca L.P. Eisenharta [1], w której pokazano, że stacjonarne równanie Schrödingera zapisane w ortogonalnym układzie współrzędnych dopuszcza rozdzielenie zmiennych względem jedenastu wyróżnionych układów. [2]

Rzeczywiście, układy Eisenharta występują bardzo często w fizyce teoretycznej. Np. tzw. rozwiązanie Kerra próżniowych równań Einsteina (neutralna, obracająca się jednostajnie, czarna dziura) daje się zapisać w tzw. "wydłużonych współrzędnych sferoidalnych" (są na liście Eisenharta) jako funkcja liniowa dwóch argumentów! [3]

Jednak użyteczność układów ortogonalnych w fizyce teoretycznej nie jest przedmiotem niniejszego eseju. Dla nas - jako "geometrów - archeologów" - najistotniejsze jest to, że najgłębsze zakorzenienie w przeszłości współczesnej teorii solitonów tkwi w programie badawczym Lamé. Jest rzeczą ciekawą, że fascynacja czymś co można nazwać **starą teorią solitonów** udzieliła się ostatnio również twórcom nowoczesnej teorii solitonów. W pracy [4] V. Zakharov omawiając osiągnięcia klasycznej geometrii różniczkowej w zakresie układów ortogonalnych w E^n zauważa:

"The milestone in history of this problem was a fundamental monography *Lęcons sur les systèmes orthogonaux et...* by G. Darboux printed in Paris in 1910. It is really astonishing, how exciting are many pages of this book to a person familiar with the modern mathematical theory of solitons!"

2 Równania Lamé - najstarszy układ solitonowy

Ortogonalny układ współrzędnych w E^3 możemy - za G. Lamé - zadać **implicite**

$$u^i = f^i(x, y, z) \quad (i = 1, 2, 3) \tag{1}$$

jako lokalny dyfeomorfizm prowadzący od współrzędnych kartezjańskich (x, y, z) do współrzędnych krzywoliniowych (u^1, u^2, u^3) z dodatkowym żądaniem (ortogonalność!):

$$a \neq b \quad \Rightarrow \nabla f^a \cdot \nabla f^b = 0, \tag{2}$$

gdzie $\nabla = \text{grad}$ zaś kropka oznacza zwykły iloczyn skalarny w E^3. Odwracając zależności (1) otrzymujemy definicję **explicite** ortogonalnego układu współrzędnych.

Zależności (2) implikują, że metrykę przestrzeni E^3 możemy we współrzędnych (u^i) zapisać następująco

$$ds^2 = H_1(u^i)(du^1)^2 + H_2(u^i)(du^2)^2 + H_3(u^i)(du^3)^2 \tag{3}$$

Współczynniki $H_a(u^i)$ noszą nazwę funkcji Lamé. Funkcje H_a koniecznie spełniają tzw. **równania Lamé**, które geometrycznie wyrażają fakt, że E^3 jest płaska:

$$H_{a,bc} - \frac{H_{a,b}H_{b,c}}{H_b} - \frac{H_{a,c}H_{c,b}}{H_c} = 0 \tag{4}$$

$$(\frac{H_{b,a}}{H_a})_{,a} + (\frac{H_{a,b}}{H_b})_{,b} + \frac{H_{a,c}H_{b,c}}{H_c^2} = 0 \tag{5}$$

gdzie w (4) i (5) ciąg (a, b, c) przebiega (123), (231) i (312), zaś przecinek oznacza różniczkowanie. (4) + (5) jest więc układem 6 równań drugiego rzędu. Także - odwrotnie - każde rozwiązanie (H_a) równań Lamé (przy spełnieniu pewnych warunków) definiuje implicite i z dokładnością do ruchu sztywnego w E^3 pewien ortogonalny układ współrzędnych. Przejście od rozwiązania (H_a) do postaci explicite wymaga rozwiązania pewnego układu liniowych równań różniczkowych cząstkowych na funkcje $x = x(u^i)$, $y = y(u^i)$, $z = z(u^i)$ zapisanego na stronie 89 (układ (28)) dzieła Lamé. Układ ten zapisujemy tensorowo:

$$\vec{\mathbf{r}}_{,ab} = \Gamma^c{}_{ab}\vec{\mathbf{r}}_{,c} \tag{6}$$

gdzie $\vec{\mathbf{r}}(u^i) = x(u^i)\vec{i} + y(u^i)\vec{j} + z(u^i)\vec{k}$ $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ - baza ortonormalna w $E^3)$ zaś $\Gamma^c{}_{ab}$ - symbole Christoffela metryki (3). I tu dotykamy natury solitonowej równań Lamé! Warunkiem koniecznym i dostatecznym na istnienie rozwiązania równania (6) są właśnie równania Lamé. Mówimy krótko (4) + (5) są **warunkami całkowalności** równania (6). Notabene, wyrażają one nic innego jak równość pochodnych mieszanych.

Taka koegzystencja układów liniowego i nieliniowego charakteryzuje wszystkie układy solitonowe [5]. W terminologii solitonowej: **układy solitonowe** to warunki całkowalności dla **problemów liniowych**. Np. (6) to problem liniowy dla równań Lamé.

Istnienie problemu liniowego dla danego układu nieliniowego nie gwarantuje, że układ nieliniowy jest istotnie solitonowy. Niemniej równania Lamé są rzeczywiście solitonowe.

Równania (4) można “odczepić” od równań (5). Izolowane równania (4) noszą nazwę **równań Darboux** (G. Darboux 1878) i są istotniejsze od więzów (5). Geometrycznie opisują w E^3 tzw. “układy sprzężone”, które są uogólnieniem układów ortogonalnych [6]. Również równania Darboux są solitonowe.

Układy sprzężone w E^3 uogólniają się na układy (sieci) sprzężone w n-wymiarowych podrozmaitościach N-wymiarowych przestrzeni rzutowych ($n \leq N$). Odpowiednio do tego (4) uogólniają się na n-wymiarowe równania Darboux. Te ostatnie to również układ solitonowy będący zarówno dla “starych” geometrów jak i dla współczesnych badaczy niewyczerpanym źródłem różnorodnych układów solitonowych. Nic więc dziwnego, że najstarsze równania solitonowe wykryto w XIX-wiecznej geometrii różniczkowej o czym świadczy poniższa tabelka.

	nazwa równania	*rok odkrycia*	*autor*
1	r-a Lamé (4) + (5)	circa 1840	Gabriel Lamé (1795-1870)
2	r-e sinh-Gordona $\phi_{12} = \sinh\phi$	1863	Julius Weingarten (1836-1910)
3	r-e sin-Gordona $\phi_{12} = \sin\phi$	1867 1868	Pierre-Ossian Bonnet (1819-1892) Alfred Enneper (1830-1885)
4	r-a Darboux	1878	Gaston Darboux (1842-1917)
5	r-e Darboux-Bianchi $\Theta_{,123} = \Theta_{,1}\Theta_{,23}\mathrm{ctg}\Theta -$ $\Theta_{,2}\Theta_{,13}\mathrm{tg}\Theta$	1885 1910	Luigi Bianchi (1856-1928) Gaston Darboux

3 Równania Lamé - dzisiaj

Solitonowa natura równań zawartych w powyższej tabelce została potwierdzona w ramach współczesnej teorii solitonów dysponującej skutecznymi, głównie spektralnymi narzędziami. W 1991 V. Dryuma jako pierwszy zauważył, że równania Darboux to abelowa redukcja tzw. układu Zakharowa - Manakova [7]

$$G_{a,bc} - G_{b,c}G_b^{-1}G_{a,b} - G_{c,b}G_c^{-1}G_{a,c} = 0 \qquad (7)$$

Tutaj $G_a(u^b)$ są odwracalnymi macierzami.

W pracy [4] V. Zakharov stosując najstarszą wersję tzw. “dressing method” znalazł obszerną klasę rozwiązań równań Lamé nie podając jednak odpowiadających im ortogonalnych układów współrzędnych.

Zainteresowanie współczesnej fizyki matematycznej układami ortogonalnymi w E^n w mniejszym stopniu wiąże się z metodą rozdzielania zmiennych. Dość nieoczekiwanie wykryto związek n-wymiarowych równań Lamé z pewnymi układami hydrodynamicznymi [8], a także z tzw. "massive topological quantum field models" [9].

4 Jeszcze o starej teorii solitonów

Teoria sieci sprzężonych to dziś mniej popularna dyscyplina geometrii różniczkowej uprawiana głównie w krajach byłego ZSRR z dość monotonnym stosowaniem techniki ruchomego reperu (É. Cartan). Kontrastuje to ze "złotym wiekiem" tej teorii, który umownie można zawrzeć w przedziale lata 80 XIX - lata 20 XX wieku. Burzliwy rozwój teorii sieci sprzężonych w tamtej epoce podporządkowany był pewnej zasadzie, którą ze szczególną konsekwencją stosował Luigi Bianchi. Zasadę tę opisał Guido Fubini w tekście będącym hołdem pośmiertnym dla Il Maestro Luigi Bianchi [10]:

"Ogromna część dorobku naukowego Bianchiego bazuje na dwóch następujących pojęciach: transformacje i twierdzenia o przemienności."

Dzisiejsza intepretacja tego tekstu: "transformacje" - to z jednej (geometrycznej) strony **transformacje sieci sprzężonych**, z drugiej zaś (solitonowej) - geometryczne odpowiedniki **transformacji Bäcklunda**, bodaj najistotniejszej, uniwersalnej cechy układów solitonowych [5]. "Twierdzenia o przemienności" dotyczą właśnie takich transformacji, a ich bardzo ważną konsekwencją (jeszcze jedno "całkowalne" oblicze równań solitonowych!) to tzw. **zasady nieliniowej superpozycji** albo na poziomie geometrycznym (powierzchni) albo też na poziomie rozwiązań.

Ta "zasada Bianchiego" znalazła liczne realizacje w dorobku innych mistrzów tamtej epoki takich jak Gaston Darboux, Claude Guichard (1861-1924) czy Luther Pfahler Eisenhart (1876-1965). Ten ostatni jest autorem imponującej syntezy teorii transformacji sieci sprzężonych [11], którą równocześnie można traktować jako syntezę starej teorii solitonów.

Dziś stara teoria solitonów przeżywa swój renesans. Z dorobku tamtej epoki skorzystali m.in. Adam Doliwa (Instytut Fizyki Teoretycznej UW) i Paolo Santini (Istituto di Fisica, Università di Roma) tworząc bardzo obiecującą teorię transformacji **dyskretnych** sieci sprzężonych [12, 13]. Jest to w tej chwili jedno z bardziej fundamentalnych ujęć teorii solitonów: jest ono zarówno wielowymiarowe jak i dyskretne.

Podziękowanie
A.S. składa podziękowanie Organizatorom XXXV Zjazdu Fizyków Polskich za zaproszenie do wygłoszenia referatu na Sesji Fizyki Matematycznej (Białystok, 23.09.1999).

Bibliografia

[1] L.P. Eisenhart, *Annals of Mathematics* 35 (1934) 284

[2] P. Moon and D.E. Spencer, *Field Theory Handbook*, Springer Verglag, 1961

[3] A. Tomimatsu and H. Sato, *Prog. Theor. Phys.* 50 (1973) 95

[4] V. Zakharov, *Duke Math. Journal* 94 103

[5] M.J. Ablowitz and P.A. Clarkson, *Solitons, Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering*, Cambridge University Press, 1991

[6] G. Darboux, *Leçons sur les Systemès Orthogonaux* ..., Paris 1910

[7] B.G. Konopelchenko, *Solitons in Multidimensions*, World Scientific, 1993

[8] S. Tsarev, *Math. in USSR* 37 (1991) 397

[9] B.Dubrovin, *Nucl. Physics B* 379 (1992) 627

[10] G. Fubini, *Annali di Matematica* 62 (1929) 45

[11] L.P. Eisenhart, *Transformations of Surfaces*, Princeton Uniwersity Press, 1923

[12] A. Doliwa and P.M. Santini, *Phys. Lett. A* 233 (1997) 365

[13] A. Doliwa, S.V. Manakov and P.M. Santini, *Comm. Math. Phys.* 196 (1998) 1